Université de Nantes Année 2013-2014
L3 Maths-Eco

Feuille 2 : Base de l'estimation paramétrique

Exercice 1 Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de pannes que subit un certain type d'appareil électroménager. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre λ. Donc

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $(X_1,\dots,X_n)$ un n-échantillon de X. Ici, $\lambda>0$ est un réel inconnu que l'on souhaite estimer à l'aide de $(X_1,\dots,X_n)$. On pose $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$ et $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

1. Déterminer la loi de S_n. Montrer que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais de λ. Étudier sa convergence presque sure.
2. Dorénavant, on cherche à estimer la probabilité qu'il n'y ait aucune panne. Cette probabilité est notée θ.
   (a) Exprimer θ en fonction de λ.
   (b) On pose $T_n=e^{-\overline{X}_n}$. Calculer $\mathbb{E}\left(T_n\right)$ et montrer que T_n n'est pas un estimateur sans biais de θ. Est-il asymptotiquement sans biais ?
   (c) On pose $\widehat{\theta}_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{S_n}$. Montrer que $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur sans biais de θ.
   (d) Calculer la variance de $\widehat{\theta}_n$. Est-ce que $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur convergent ?
3. *Application.* Un expérimentateur a relevé le nombre de pannes que subissent 10000 appareils de ce type. Les mesures obtenues, notées $x_1,\dots,x_{10000}$, donnent $\sum_{i=1}^{10000}x_i=20000$. Donner une estimation ponctuelle de la probabilité qu'il n'y ait aucune panne.

Exercice 2 On désire estimer la proportion p inconnue de brochets dans un grand lac. Pour ce faire, on pêche des poissons jusqu'à ce qu'on obtienne n brochets. Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de poissons qu'il a fallu pêcher. On admet que la proportion p ne varie pas au cours de la pêche. La loi de X est

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}, \qquad k\in\mathbb{N}-\{0,\dots,n-1\}.$$

1. Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}-\{0,\dots,n-1\}$, $\dfrac{n-1}{k-1}\times\binom{k-1}{n-1}=\binom{k-2}{n-2}$.
2. Montrer que $\widehat{p}=\dfrac{n-1}{X-1}$ est un estimateur sans biais de p. On rappelle la formule du binôme négatif : pour tout $x\in]-1,1[$ et tout $m\in\mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{k=m}^{\infty}\binom{k}{m}x^{k-m}=\frac{1}{(1-x)^{m+1}}$.

Exercice 3 On considère n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ suivant la loi uniforme sur $[\theta, 2\theta]$ où $\theta > 0$. On note $m_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ et $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

1. Déterminer la densité de probabilité de m_n et M_n.
2. En déduire $\mathbb{E}(m_n)$ et $\mathbb{E}(M_n)$.
   On admet dans la suite que
$$\mathbb{V}(m_n) = \mathbb{V}(M_n) = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}.$$
3. Afin d'estimer θ, on propose comme estimateur $\hat{\theta} = M_n/2$. Etudier son biais, son erreur quadratique moyenne et sa convergence dans L^2.
4. Construire à partir de m_n un autre estimateur de θ. Est-il sans biais ? Si non, le modifier afin qu'il devienne sans biais.
5. Comparer l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\theta}_n$ et de l'estimateur sans biais construit ci-dessus.

Exercice 4 Soient X une variable aléatoire réelle de densité
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & \text{si } x \in [0, a], \\ \dfrac{1}{2(1-a)} & \text{si } x \in]a, 1], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
$n \in \mathbb{N}^*$, et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de X. Ici, $a \in]0, 1[$ est un réel inconnu que l'on souhaite estimer à l'aide de $(X_1, \ldots, X_n)$. On pose $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$. Montrer que $\mathbb{V}(X) = \dfrac{4 + (2a-1)^2}{48}$.
2. Calculer $\mathbb{E}\left(\overline{X}_n\right)$ et $\mathbb{V}\left(\overline{X}_n\right)$. En déduire un estimateur T_n sans biais de a et étudier sa convergence.
3. Étudier la convergence en loi de la suite $\left(\dfrac{T_n - a}{\sqrt{\mathbb{V}(T_n)}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.