Feuille 4 : Information de Fisher et vraisemblance

Exercice 1 Soient X la variable aléatoire réelle de loi

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda^a} \frac{\lambda^{ak}}{k!}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

$n \in \mathbb{N}^*$, et $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de X. Le paramètre $a \neq 0$ est un réel connu et le paramètre $\lambda > 0$ est un réel inconnu.

1. Montrer que le modèle considéré appartient à la famille des modèles exponentiels.
2. Montrer que l'information de Fisher est

$$I_n(\lambda) = na^2\lambda^{a-2}.$$

Exercice 2 Soient X la variable aléatoire réelle de densité

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\theta}{(x+\theta)^2} & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}^*$, et $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de X. Le paramètre $\theta > -1$ est un réel inconnu. On admet que le modèle est suffisamment régulier pour impliquer l'existence de l'information de Fisher et du théorème de Cramer-Rao. Montrer que l'information de Fisher est

$$I_n(\theta) = \frac{n}{3(1+\theta)^2}.$$

Exercice 3 La durée de vie en heures d'un certain type d'ampoule est une variable aléatoire réelle X de densité

$$f(x) = \begin{cases} \theta^2 x e^{-\theta x} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de X. Ici, $\theta > 0$ est un réel inconnu que l'on souhaite estimer à l'aide de $(X_1, \dots, X_n)$.

1. Montrer que le modèle considéré appartient à la famille des modèles exponentiels.
2. Calculer l'information de Fisher $I_n(\theta)$.
3. Déterminer un estimateur de θ par la méthode des moments.
4. Déterminer un estimateur $\hat{\theta}_n^{MV}$ de θ par la méthode du maximum de vraisemblance et donner son risque quadratique.
5. Proposer un estimateur sans biais et comparer le à l'estimateur du maximum de vraisemblance.

6. Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires réelles $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta)$.

Exercice 4 Soient X une variable aléatoire réelle de densité

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} x^{-1-\frac{1}{\theta}} & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}^*$, et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de X. Ici, $\theta > 0$ est un réel inconnu que l'on souhaite estimer à l'aide de $(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que le modèle considéré appartient à la famille des modèles exponentiels.
2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ de θ. Est-il sans biais ?
3. Calculer l'information de Fisher $I_n(\theta)$.
4. Comparer $I_n(\theta)$ avec $\mathbb{V}\left(\widehat{\theta}_n\right)$. En déduire que $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur efficace de θ.

Exercice 5 Soient X une variable aléatoire réelle de densité

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{x^{\theta+1}} & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}^*$, et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de X. Ici, θ est un réel inconnu que l'on souhaite estimer à l'aide de $(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que le modèle considéré appartient à la famille des modèles exponentiels.
2. On suppose que $\theta > 1$. Déterminer un estimateur $\hat{\theta}$ de θ par la méthode des moments.
3. On suppose maintenant que $\theta > 0$. Montrer que la méthode des moments n'est pas applicable et calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\tilde{\theta}$.
4. Calculer l'information de Fisher $I_n(\theta)$.
5. Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires réelles $\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta)$.
6. L'estimateur $\tilde{\theta}$ est-il asymptotiquement efficace ?

Exercice 6 Soient X une variable aléatoire réelle de densité

$$f(x) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$n \in \mathbb{N}^*$, et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de X. Ici, $\theta > 0$ est un réel inconnu que l'on souhaite estimer à l'aide de $(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que le modèle considéré appartient à la famille des modèles exponentiels.
2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ de θ.
3. Montrer que $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur efficace de θ.

4. Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires réelles $\left(\sqrt{I_n(\theta)}\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On suppose que n est suffisamment grand pour approcher la loi de $\sqrt{I_n(\theta)}\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right)$ à cette loi limite. En utilisant cette approximation, déterminer un intervalle de confiance pour θ au niveau asymptotique 95%.

Exercice 7 La durée de vie en heures d'un certain type d'ampoule est une variable aléatoire réelle X de densité

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de X. Ici, $\theta > 0$ est un réel inconnu que l'on souhaite estimer à l'aide de $(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que le modèle considéré appartient à la famille des modèles exponentiels.
2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ de θ.
3. Calculer l'information de Fisher $I_n(\theta)$.
4. Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires réelles
$$\left(\sqrt{I_n(\theta)}\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$
On suppose que n est suffisamment grand pour approcher la loi de $\sqrt{I_n(\theta)}\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right)$ à cette loi limite. En utilisant cette approximation, déterminer un intervalle de confiance pour θ au niveau 98%.
5. *Application.* Un expérimentateur a évalué la durée de vie de 1000 ampoules de ce type. Les résultats en heures, notés $(x_1, \ldots, x_{1000})$, donne. $\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} x_i = 95,6$. Déterminer un intervalle de confiance pour θ au niveau 98% correspondant à ces observations.

Exercice 8 On considère un n-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ d'une loi logisitique de paramètre $\theta \in \mathbb{R}$, de densité

$$f(x) = \frac{e^{-(x-\theta)}}{\left(1 + e^{-(x-\theta)}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que f est symétrique autour de θ. En déduire l'espérance de X_1.
2. En déduire un estimateur des moments de θ.
3. En admettant que $Var(X_1) = \pi^2/3$, donner une approximation de la loi asymptotique de l'estimateur.
4. En déduire un intervalle de confiance pour θ au niveau asymptotique $1 - \alpha$, où $\alpha \in [0, 1]$.
5. On admet que l'information de Fisher apportée par une observation vaut $I(\theta) = 1/3$. L'estimateur proposé précédemment est-il asymptotiquement efficace ?
6. Montrer que le maximum de vraisemblance existe. Peut-on en donner une formule explicite ? Quelle est approximativement sa loi asymptotique ?
7. En déduire un second intervalle de confiance pour θ au niveau asymptotique $1 - \alpha$, où $\alpha \in [0, 1]$.