Université de Nantes Année 2013-2014
L3 Maths-Eco

Feuille 5 : Intervalles de confiance

Exercice 1 Soit $X_1, \dots, X_n$ un n-échantillon suivant une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2. On suppose qu'aucun des deux paramètres n'est connu.

1. En supposant que σ^2 est connu, proposer une fonction pivotale pour le paramètre μ. Quelle est sa loi ?
2. En déduire un intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ pour μ, où $\alpha \in [0,1]$, dans le cas où σ^2 est connu.
3. En supposant que σ^2 est inconnu, proposer une fonction pivotale pour le paramètre μ. Quelle est sa loi ?
4. En déduire un intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ pour μ, où $\alpha \in [0,1]$, dans le cas où σ^2 est inconnu.
5. Proposer une fonction pivotale pour le paramètre σ^2 lorsque μ est inconnu. Quelle est sa loi ?
6. En déduire un intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ pour σ^2, où $\alpha \in [0,1]$.

Exercice 2 La durée de vie en heures d'un certain type d'ampoule électrique est une variable aléatoire réelle X suivant une loi Normale d'écart-type 400. Les mesures des durées de vie d'un lot de 12 ampoules a donné les résultats suivants : 2311 ; 1981 ; 3110 ; 1647 ; 2112 ; 2054 ; 2580 ; 2122 ; 1513 ; 2221 ; 2307 ; 2418. Déterminer un intervalle de confiance pour la durée de vie moyenne d'une ampoule au niveau 95%.

Exercice 3 Une usine fabrique des câbles. La masse maximale en tonnes supportée par un câble est une variable aléatoire réelle X suivant la loi Normale de moyenne μ inconnue et d'écart-type $0,5$. Une étude portant sur un échantillon de 50 câbles a donné une moyenne des charges maximales supportées égales à $12,2$ tonnes.

1. Déterminer un intervalle de confiance pour μ au niveau 99%.
2. Déterminer la taille minimale de l'échantillon étudié pour que la longueur de l'intervalle de confiance au niveau 99% soit inférieure ou égale à $0,2$.

Exercice 4 Un biochimiste étudie un type de moisissure qui attaque les cultures de blé. La toxine contenue dans cette moisissure est obtenue sous forme d'une solution organique. La quantité de substance toxique par gramme de solution est une variable aléatoire réelle X suivant une loi Normale. L'unité est le milligramme. On mesure la quantité de substance toxique par gramme de solution. Sur 9 extraits, on a obtenu les mesures suivantes : $1,2$; $0,8$; $0,6$; $1,1$; $1,2$; $0,9$; $1,5$; $0,9$; 1.

1. Déterminer une estimation ponctuelle de la moyenne et de l'écart-type de la quantité de substance toxique par gramme de solution.
2. Déterminer un intervalle de confiance pour la quantité moyenne de substance toxique par gramme de solution au niveau 95%.

3. Déterminer un intervalle de confiance pour l'écart-type de la quantité de substance toxique par gramme de solution au niveau 95%.

Exercice 5 Une pisciculture élève une certaine espèce de poissons. La masse en grammes d'un poisson de cette pisciculture est une variable aléatoire réelle X suivant la loi Normale de moyenne μ et d'écart-type σ inconnus. On a mesuré les masses de 30 poissons de la même espèce. Les résultats sont :

70	85	93	99	101	105	110	121	138	166
74	85	93	99	102	106	110	125	140	180
79	87	94	99	102	107	114	128	147	180

1. Donner une estimation ponctuelle de μ et σ^2.
2. Déterminer un intervalle de confiance pour μ au niveau 95%.
3. Déterminer un intervalle de confiance pour σ^2 au niveau 95%.

Exercice 6 Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon de la loi uniforme $U([0,\theta]), \theta > 0$. On pose $X_{(n)} = max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que $\theta/X_{(n)}$ est une fonction pivotable.
2. Déterminer la densité de probabilité de $\theta/X_{(n)}$.
3. Soit $0 < \alpha < 1$. Montrer que $[X_{(n)}, \alpha^{-1/n} X_{(n)}]$ est un intervalle de confiance pour θ de niveau $1 - \alpha$.
4. Montrer qu'il s'agit du plus étroit intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ de la forme $[aX_{(n)}, bX_{(n)}]$ avec $a, b \geqslant 1$.

Exercice 7 On considère une population de rongeurs. Afin de déterminer la proportion de mâles dans la population, on analyse un échantillon de 400 naissances. Sur ces 400 naissances, 206 rongeurs sont des mâles. Déterminer un intervalle de confiance pour la proportion inconnue de mâles dans la population de rongeurs au niveau asymptotique 95%.

Exercice 8 On modélise la durée de vie X d'un composant électronique par une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On appelle demi-vie la valeur T telle que $P(X < T) = P(X > T) = 1/2$.

1. Exprimer T en fonction de λ.
2. On observe les durées de vie de n composants électroniques. On suppose qu'elles sont indépendantes et on les note $X_1, \ldots, X_n$. Proposer un estimateur de T basé sur cet échantillon à l'aide de la méthode des moments.
3. L'estimateur précédent est-il sans biais ? converge-t-il en moyenne quadratique ? converge-t-il presque surement ? est-il efficace ?
4. Etablir la loi asymptotique de $\sqrt{n}(\hat{T} - T)$. En déduire un intervalle de confiance au niveau asymptotique $1 - \alpha$ pour T.
5. Quelle est la loi de $\sum_{i=1}^{n} X_i$? En déduire que $\lambda n \hat{T}/\ln 2$ est une fonction pivotale pour T. Quelle est sa loi ?
6. En déduire un intervalle de confiance pour T au niveau $1 - \alpha$.
7. Quel intervalle de confiance privilégier ?