PUB. IRMA, LILLE 2005
Vol. 63, N^o IX

PROCESSUS EMPIRIQUE DE FONCTIONNELLES DE CHAMPS GAUSSIENS À LONGUE MÉMOIRE *

Frédéric Lavancier
LS-CREST, INSEE, Paris
Laboratoire Paul Painlevé, UMR CNRS 8524
Bât. M2. Université des Sciences et Technologies de Lille
F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

Résumé

Nous étudions le comportement asymptotique du processus empirique d'une fonctionnelle d'un champ sur $\mathbb{Z}^d$, gaussien, stationnaire et à longue mémoire.

La forte dépendance du champ considéré pourra être soit régulière, comme dans les travaux pré-existants, soit non-régulière. Dans tous les cas nous trouvons que la limite du processus empirique doublement indexé est dégénérée dans la mesure où elle est, comme lorsque $d = 1$, de la forme $f(x)Z(t)$ où f est une fonction déterministe et Z un champ aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$. Les applications statistiques de ces résultats feront l'objet d'un prochain travail.

Abstract

We study the asymptotic behavior of the doubly indexed empirical process of stationary Gaussian subordinated random fields with long-range dependence. Contrary to the situation chosen in the pre-existing papers, the long memory is not necessarily regular and we find, in all the investigated cases, that the limiting process is degenerated insofar as it has the form $f(x)Z(t)$ where f is the marginal density and Z a random field. The statistical applications of the results shall be presented in a forthcoming paper.

Mots clés : Empirical process, Gaussian subordinated random fields, Non regular long memory, Unbounded spectrum.

*preprint

1 Introduction

Un champ aléatoire stationnaire $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ est communément dit à longue mémoire, ou fortement dépendant, lorsque sa fonction de covariance $r(h),\ h \in \mathbb{Z}^d$, n'est pas absolument sommable, c'est à dire si $\sum_{h\in\mathbb{Z}^d} |r(h)| = \infty$. Une définition alternative proche mais pas équivalente consiste à supposer sa densité spectrale non bornée en certains points. On peut distinguer la longue mémoire régulière de la longue mémoire non-régulière selon la définition suivante.

Définition 1. Un champ aléatoire stationnaire est à longue mémoire régulière si sa densité spectrale vérifie en 0 :

$$f(x) \sim |x|^{\alpha-d}\, b\left(\frac{x}{|x|}\right) L\left(\frac{1}{|x|}\right) \tag{1.1}$$

où L est une fonction à variation lente à l'infini et b est une fonction continue sur la sphère unité de $\mathbb{R}^d$, $|.|$ étant la norme l^1 dans $\mathbb{R}^d$.

Dans les travaux sur les champs aléatoires à longue mémoire, on rencontre couramment l'hypothèse suivante sur le comportement de la fonction de covariance :

$$r(n) \underset{n\to\infty}{\sim} |n|^{-\alpha} L(|n|)\ b\left(\frac{n}{|n|}\right), \qquad 0 < \alpha < d, \tag{1.2}$$

où L est une fonction à variation lente et b une fonction continue sur la sphère unité de $\mathbb{R}^d$. La condition (1.2) est liée à (1.1) par un résultat de Wainger (1965) qui affirme que, si un champ aléatoire admet une fonction de covariance de la forme (1.2) et si sa densité spectrale est bornée hors de l'origine, alors il est à longue mémoire régulière au sens de la définition 1.

L'objectif de cet article est d'étudier le comportement asymptotique du processus empirique d'une fonctionnelle d'un champ gaussien à longue mémoire non-nécessairement régulière. Nous considérons ici le processus empirique doublement indexé par $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]^d$. Il est défini, à une normalisation près dépendante de n, par

$$\sum_{j\in A_{[nt]}} \left[I_{\{G(X_j)\le x\}} - F(x) \right], \tag{1.3}$$

où G est une fonction mesurable, où $A_n = \{1,\dots,n\}^d$ et où F est la fonction de répartition du champ aléatoire $(G(X_j))_{j\in\mathbb{Z}^d}$.

En dimension $d = 1$, cette étude a été effectuée par Dehling and Taqqu (1989) sous l'hypothèse où X est gaussien et vérifie (1.2). Ils montrent la dégénérescence asymptotique du processus limite, celui-ci ayant la forme $f(x)Z(t)$, où f est une fonction déterministe et Z un champ aléatoire. Ce comportement, en dimension $d = 1$, semble être une caractéristique exclusive des processus à longue mémoire et l'on peut se demander si cette dégénérescence persiste dans le cadre plus large des champs.

En dimension d quelconque, la convergence de (1.3) est étudiée en $t = 1$ dans Doukhan et al. (2002) lorsque G est la fonction identité et lorsque le champ stationnaire X est linéaire, sa fonction de covariance ayant la forme (1.2). L'étude de ces auteurs concerne donc des champs à longue mémoire régulière. Leur résultat montre la même dégénérescence asymptotique du processus empirique que celle qui se produit en dimension $d = 1$.

Dans le corollaire 1, nous reprenons l'étude de Doukhan et al. (2002) et montrons, pour un processus gaussien vérifiant (1.2), et pour une fonction G quelconque, la convergence du champ (1.3) proprement normalisé dans l'espace $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}} \times [0,1]^d)$. Ce travail étend donc aux dimensions $d \geq 2$ celui de Dehling and Taqqu (1989).

Nous supposons ensuite, dans le corollaire 2, que le champ X est linéaire, gaussien et que sa densité spectrale est non-bornée sur un sous-espace linéaire de $[-\pi, \pi]^d$. Nous sommes alors en présence de longue mémoire non-régulière car la densité spectrale du champ X ne vérifie pas (1.1). Nous établissons la convergence dans $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}} \times [0,1]^d)$ du processus empirique proprement normalisé lorsque le rang de Hermite de G vaut 1.

L'ensemble de ces résultats repose sur le principe de réduction uniforme introduit par Dehling and Taqqu (1989), que nous généralisons dans le théorème 1, reliant le comportement asymptotique du processus empirique d'un champ aléatoire à longue mémoire à celui de ses sommes partielles.

Il nous est donc nécessaire de connaître, dans chaque situation rencontrée ici, la limite dans $\mathcal{D}([0,1]^d)$ des sommes partielles du champ aléatoire X ou d'une fonctionnelle de X lorsque le rang de Hermite de G est différent de 1. La convergence des lois fini-dimensionnelles de ces sommes partielles est montrée dans Dobrushin and Major (1979) dans le cas où X est gaussien et vérifie (1.2) c'est à dire dans un cadre de longue mémoire régulière. Elle est établie dans Lavancier (2003) dans un cas de longue mémoire non-régulière, plus précisement lorsque la densité spectrale du champ est non-bornée sur un sous-espace linéaire de $[-\pi, \pi]^d$. Nous étendons ces deux convergences à $\mathcal{D}([0,1]^d)$ dans la section 3.

La section 2 établit le principe de réduction uniforme et la convergence du processus empirique doublement indexé dans des situations de longue mémoire soit régulière soit non-régulière. La section 3 donne un critère d'équitension dans $\mathcal{D}([0,1]^d)$ et étend la convergence des sommes partielles de nos champs à cet espace. Enfin la section 4 contient la preuve du théorème 1.

2 Convergence du processus empirique sous différentes situations de forte dépendance

Soit $(X_j)_{j \in \mathbb{Z}^d}$ un champ gaussien stationnaire de fonction de covariance r tel que $r(0) = 1$. Soit G une fonction mesurable. On considère le développement suivant sur la base des pôlynomes de Hermite :

$$I_{\{G(X_j) \leq x\}} - F(x) = \sum_{q=m}^{\infty} \frac{J_q(x)}{q!} H_q(X_j),$$

où $F(x) = P(G(X_1) \leq x)$ est la fonction de répartition de $G(X_1)$. Les H_q sont les pôlynomes de Hermite de degré q et

$$J_q(x) = E\left[I_{\{G(X_1)\leq x\}} H_q(X_1)\right].$$

m est appelé le rang de Hermite de la fonction $I_{\{G(X_1)\leq x\}} - F(x)$. Soit

$$S_n(x) = \sum_{j \in A_n} \left[I_{\{G(X_j)\leq x\}} - F(x) - \frac{J_m(x)}{m!} H_m(X_j) \right],$$

où $A_n = \{1, \ldots, n\}^d$.

Théorème 1. *Avec les notations précédentes, soit*

$$d_N^2 = Var\left(\sum_{j\in A_N} H_m(X_j)\right) = m! \sum_{j,k\in A_N^2} r^m(k-j). \tag{2.1}$$

Si $d_N \longrightarrow \infty$, on a, pour tout $\delta > 0$ et tout $n \leq N$,

$$P\left(\sup_x d_N^{-1} |S_n(x)| > \varepsilon\right) \leq C(\varepsilon) N^\delta d_N^{-2} \sum_{j,k\in A_N^2} |r(k-j)|^{m+1} + \frac{d_n^2}{N^{2d}}, \tag{2.2}$$

où $C(\varepsilon)$ est une constante positive qui dépend de ε.

Si l'on connait la distribution limite de $d_N^{-1}\sum_{j\in A_N} H_m(X_j)$, l'inégalité (2.2) nous fournit le comportement asymptotique du processus empirique (1.3) dès que le majorant dans (2.2) tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini.

Nous présentons deux corollaires dans lesquels ces deux conditions sont remplies. Le premier concerne les champs à longue mémoire régulière, c'est une situation classique où la forte dépendance a lieu de façon isotrope. La convergence des lois fini-dimensionnelles du processus des sommes partielles a été étudiée dans ce cadre par Dobrushin and Major (1979) et l'équitension est montrée dans le théorème 3 ci-dessous. Le second corollaire concerne des situations de longue mémoire non régulière : nous considérons plus précisement des champs dont la densité spectrale est non-bornée sur des sous espaces linéaires de $[-\pi, \pi]^d$. La convergence des sommes partielles de tels champs a été obtenu dans Lavancier (2003) lorsque le rang de Hermite vaut 1, c'est pourquoi nous nous placerons dans ce corollaire sous l'hypothèse $m = 1$.

2.1 Longue mémoire régulière

Le corollaire suivant donne la convergence du processus empirique d'une fonctionnelle d'un champ gaussien à longue mémoire régulière.

Corollaire 1. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire gaussien stationnaire centré. Soit G une fonction mesurable et F la fonction de répartition de $G(X_n)$.*

Soit m le rang de Hermite de la fonction $I_{\{G(X_j)\le x\}} - F(x)$ et $J_m(x)$ le coefficient d'ordre m dans son développement.

On suppose que (X_n) admet comme fonction de covariance

$$r(k) = |k|^{-\alpha} L(|k|) b\left(\frac{k}{|k|}\right), \tag{2.3}$$

avec $r(0) = 1$, où $0 < m\alpha < d$, où $|k| = \sum_{i=1}^{d} |k_i|$ et où L est une fonction à variation lente à l'infini et b une fonction continue sur la sphère unité de $\mathbb{R}^d$.

Alors

$$\frac{1}{N^{d-m\alpha/2}(L(N))^{m/2}} \sum_{j\in A_{[Nt]}} \left[I_{\{G(X_j)\le x\}} - F(x)\right] \overset{\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}\times[0,1]^d)}{\Longrightarrow} \frac{J_m(x)}{m!} Z_m(t),$$

où la convergence a lieu dans $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}\times[0,1]^d)$ muni de la topologie uniforme et de la tribu engendrée par les boules ouvertes et où Z_m défini par (2.8) ci-dessous est le processus de Hermite de degré m.

Démonstration. Dobrushin and Major (1979) donnent l'équivalent de d_N défini en (2.1) lorsque N tend vers l'infini :

$$d_N^2 \sim N^{2d-m\alpha}(L(N))^m. \tag{2.4}$$

D'autre part, cherchons l'ordre de $\sum_{j,k\in A_N} |r(k-j)|^{m+1}$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j,k\in A_N} |r(k-j)|^{m+1} \\
&\qquad \le N^d + 2^d \sum_{k\in A_{N-1}} |k|^{-(m+1)\alpha} L(|k|)^{m+1} \left(b\left(\frac{k}{|k|}\right)\right)^{m+1} \prod_{j=1}^{d} (N-k_j) \\
&\qquad \le N^d + cN^d \sum_{k\in A_{N-1}} |k|^{-(m+1)\alpha} L(|k|)^{m+1},
\end{aligned}$$

car la fonction b est bornée, c étant une constante strictement positive. Le théorème de Potter sur les fonctions à variation lente (cf Bingham et al. (1987)) affirme que si $y \le x$ alors pour tout $\eta > 0$, il existe une constante c telle que

$$L(y) \le c\left(\frac{y}{x}\right)^{-\eta} L(x). \tag{2.5}$$

Nous appliquons cette inégalité à $y = |k| = k_1 + \cdots + k_d$ et $x = dN$ en choisissant $\eta < \alpha$. On a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k\in A_N} |r(k-j)|^{m+1} &\le N^d + cN^d \sum_{k\in A_{N-1}} |k|^{-(m+1)(\alpha+\eta)} L(dN)^{m+1} (dN)^{(m+1)\eta} \\
&\le N^d + cN^{2d-(m+1)\alpha} L(N)^{m+1} \frac{L(dN)^{m+1}}{L(N)^{m+1}}.
\end{aligned}$$

Comme L est une fonction à variations lentes, $L(dN)/L(N)$ est borné et l'on obtient finalement

$$\sum_{j,k\in A_N} |r(k-j)|^{m+1} = O(N^{2d-(m+1)\alpha}L(N)^{m+1}) + O(N^d). \tag{2.6}$$

On montre ainsi grâce à (2.4) et (2.6) que le terme de droite dans l'inégalité (2.2) converge vers 0 dès que $\delta < \alpha \wedge (d - m\alpha)$.

On a donc :

$$\left\| \frac{1}{N^{d-m\alpha/2}(L(N))^{m/2}} \sum_{j\in A_{[Nt]}} \left[I_{\{G(X_j)\le x\}} - F(x) - J_m(x)H_m(X_j) \right] \right\|_\infty \longrightarrow 0 \tag{2.7}$$

en probabilité où la norme considérée est la norme uniforme par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}$ et la variable $t \in [0,1]^d$.

Dobrushin and Major (1979) obtiennent la convergence des lois fini-dimensionnelles des sommes partielles du processus $H_m(X_j)$ vers le processus de Hermite Z_m avec

$$Z_m(t) = c_{m,\alpha} \int_{\mathbb{R}^{md}} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{it_j\left(x_j^{(1)}+\cdots+x_j^{(m)}\right)} - 1}{i\left(x_j^{(1)}+\cdots+x_j^{(m)}\right)} Z_{G_0}(x^{(1)})\ldots Z_{G_0}(x^{(m)}), \tag{2.8}$$

où $c_{m,\alpha}$ est une constante dépendante de m et α et où Z_{G_0} est un champ spectral gaussien de base la mesure spectrale G_0. La mesure spectrale G_0 est définie en tout borélien A de $\mathbb{R}^d$ comme la limite de $N^\alpha L(N)^{-1}G(N^{-1}A)$ où G est la mesure spectrale de $(X_j)_{j\in\mathbb{Z}^d}$; elle est déterminée par la relation

$$2^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{i<t,x>} \prod_{j=1}^{d} \frac{1-\cos(x_j)}{x_j^2} G_0(dx) = \int_{[-1,1]^d} \frac{a\left(\frac{x-t}{|x+t|}\right)}{|x+t|^\alpha} \prod_{j=1}^{d} (1-|x_j|)dx.$$

Lorsque $d = 1$ (2.8) se simplifie car G_0 admet une densité proportionnelle à $|x|^{\alpha-1}$ et dans ce cas

$$Z_m(t) = c_{m,\alpha} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{e^{it(x^{(1)}+\cdots+x^{(m)})} - 1}{i(x^{(1)}+\cdots+x^{(m)})} \prod_{k=1}^{m} \left|x^{(k)}\right|^{\frac{\alpha-1}{2}} dW(x^{(k)}),$$

où W est le champ spectral associé au bruit blanc gaussien.

Le théorème 3 ci-dessous montre que la convergence vers Z_m du processus des sommes partielles de $H_m(X_j)$ a lieu dans $\mathcal{D}([0,1]^d)$. Le processus Z_m appartenant à $C([0,1]^d)$, on peut donc, d'après le théorème de représentation de Skorohod et Dudley, trouver une version $\tilde{Z}_m$ de Z_m et une version $\tilde{Z}_{m,N}$ des sommes partielles normalisées telles que

$$\|\tilde{Z}_{m,N}(.) - \tilde{Z}_m(.)\|_{\mathcal{D}([0,1]^d)} \xrightarrow{p.s.} 0,$$

la norme considérée étant la norme uniforme. D'où

$$\|J_m(.)\tilde{Z}_{m,N}(.) - J_m(.)\tilde{Z}_m(.)\|_{\mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}}\times[0,1]^d)} \xrightarrow{p.s.} 0,$$

J_m étant fonction bornée dépendante de $x \in \mathbb{R}$ et Z_m étant fonction de $t \in [0,1]^d$. Ainsi

$$J_m(x)d_N^{-1} \sum_{j\in A_{[Nt]}} H_m(X_j) \overset{\mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}}\times[0,1]^d)}{\Longrightarrow} J_m(x)Z_m(t). \tag{2.9}$$

L'espace $\mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}} \times [0,1]^d)$ n'étant pas séparable, il convient de considérer la tribu engendrée par les boules ouvertes plutôt que la tribu borelienne pour rendre le processus empirique mesurable dans cet espace (cf par exemple Pollard (1984)). La convergence faible considérée dans $\mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}}\times[0,1]^d)$ ci-dessus est donc à entendre dans cette tribu.

Finalement (2.7) et (2.9) nous donnent la convergence annoncée. □

2.2 Longue mémoire non-régulière

Nous donnons maintenant un resultat de convergence dans le cas de champs gaussiens linéaires à longue mémoire non-régulière. Ces champs ont une densité spectrale non-bornée sur un sous espace linéaire de $[-\pi,\pi]^d$. L'étude de leurs sommes partielles, effectuée dans Lavancier (2003) et dans le théorème 4 ci-dessous, nous permet ici d'obtenir le comportement asymptotique du processus empirique. Pour cela, nous supposerons dans toute cette partie que le rang de Hermite du processus empirique centré de $G(X_n)$ vaut 1.

Corollaire 2. *Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ un champ gaussien stationnaire de densité spectrale bornée. On considère le champ linéaire*

$$X_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k\varepsilon_{n-k}, \tag{2.10}$$

où les (a_k) sont, à une constante normalisatrice près garantissant $Var(X_1) = 1$, les coefficients de Fourier du filtre

$$a(\lambda) = \left|\sum_{i=1}^{d} c_i\lambda_i\right|^{\alpha/2}, \quad -1 < \alpha < 0, \tag{2.11}$$

où $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_d)$ et $(c_1,\ldots,c_d) \in \mathbb{R}^d$, et vérifient donc, au sens de la convergence dans L^2,

$$a(\lambda) = (2\pi)^{-d/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k e^{-i<k,\lambda>}.$$

Soit G une fonction mesurable et F la fonction de répartition de $G(X_n)$. On suppose que le rang de Hermite de la fonction $I_{\{G(X_n)\le x\}} - F(x)$ vaut 1.

Alors, quel que soit $-1 < \alpha < 0$ lorsque $d \leq 3$ et sous la restriction $-\frac{1}{d-2} < \alpha < 0$ lorsque $d \geq 4$,

$$\frac{1}{n^{d/2-\alpha/2}} \sum_{j \in A_{[nt]}} \left(I_{\{G(X_j) \leq x\}} - F(x)\right) \overset{\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}} \times [0,1]^d)}{\Longrightarrow} J_1(x) B(t),$$

où

$$J_1(x) = E[I_{\{G(X_1) \leq x\}} X_1],$$

et où la convergence a lieu dans $D(\overline{\mathbb{R}} \times [0,1]^d)$ muni de la topologie uniforme et de la tribu engendrée par les boules ouvertes. Le champ $B(t)$ n'est pas explicite dans le cas général mais dans le cas particulier où ε est un bruit blanc il vaut :

$$B(t) = \int_{\mathbb{R}^d} a(u) \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{it_j u_j} - 1}{iu_j} dW(u),$$

où $u = (u_1, \ldots, u_d)$ et W est le champ spectral associé au bruit blanc gaussien.

Remarque 1. On ne peut pas alléger l'hypothèse (2.11) sur a en ne spécifiant qu'un équivalent du filtre en 0, ce qui suffit pourtant à obtenir la convergence des sommes partielles dans le cas $d = 2$ (cf Lavancier (2003)). Alors que les pôles non-nuls de la densité spectrale de X ne jouent aucun rôle dans le comportement asymptotique de ses sommes partielles en dimension 2, ils peuvent modifier celui du processus empirique. Ould Haye (2002) a montré en effet, en dimension $d = 1$, que le comportement asymptotique du processus empirique pouvait être gouverné non pas par le premier terme dans son développement de Hermite mais par son second terme, et ce à cause des pôles non nuls de sa densité spectrale. C'est par exemple le cas lorsque la densité spectrale du processus considéré s'écrit

$$f(\lambda) = |\lambda|^{\alpha_0} |\lambda^2 - 1|^{\alpha_1} \tag{2.12}$$

avec $-1 < \alpha_1 < -1/2$ et $2\alpha_1 < \alpha_0 - 1$. En dimension $d = 2$, le même phénomène se produira en considérant par exemple un filtre de type produit tensoriel i.e. $a(\lambda_1, \lambda_2) = a_1(\lambda_1) a_2(\lambda_2)$ dont l'une des composantes vaut (2.12) et l'autre est constante ; son seul équivalent en 0, qui est de la forme (2.11), ne suffira donc pas à donner le comportement asymptotique du processus empirique associé.

Pour la démonstration du corollaire 2, on utilisera la proposition suivante

Proposition 1. *La fonction de covariance du champ linéaire (2.10) vérifie lorsque $n \to \infty$*

$$\text{si } -1/2 < \alpha < 0, \quad \sum_{\mathrm{j,k} \in \mathrm{A}_\mathrm{n}^2} \mathrm{r}^2(\mathrm{k} - \mathrm{j}) = \mathrm{O}(\mathrm{n}^\mathrm{d}),$$

$$\text{si } -1 < \alpha < -1/2, \quad \sum_{\mathrm{j,k} \in \mathrm{A}_\mathrm{n}^2} \mathrm{r}^2(\mathrm{k} - \mathrm{j}) = \mathrm{O}(\mathrm{n}^{\mathrm{d}-1-2\alpha}),$$

où $A_n = \{1, \ldots, n\}^d$.

Preuve de la proposition 1. Soit $f_X(\lambda),\ \lambda \in [-\pi,\pi]^d$ la densité spectrale de X. D'après la définition (2.10) de X on sait que f_X est majorée à une constante près par $\left|\sum_{i=1}^d c_i\lambda_i\right|^\alpha$. Dans le cas où $-1/2 < \alpha < 0$, la densité spectrale de X est donc de carré intégrable et par la formule de Parseval sa fonction de covariance est de carré sommable. On a ainsi

$$\sum_{j,k\in A_n} r^2(k-j) = \sum_{k\in A'_n} r^2(k)\prod_{j=1}^d (n-|k_j|) \le n^d \sum_{\mathbb{Z}^d} r^2(k),$$

où $A'_n = \{-n+1,\dots,n-1\}^d$, ce qui prouve la première partie de la proposition 1.

Dans le cas où $-1 < \alpha < -1/2$, on utilise la représentation de la fonction de covariance à l'aide de la densité spectrale et on obtient

$$\sum_{j,k\in A_n} r^2(k-j) = n^d \int_{[-\pi,\pi]^{2d}} f_X(x)f_X(y)\prod_{j=1}^d F_n(x_j-y_j)dxdy, \qquad (2.13)$$

où F_n est le noyau de Fejer :

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi n}\frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}.$$

On effectue dans (2.13) le changement de variables $s_j = x_j - y_j$, $j = 1\dots d$, les x_j restant inchangés. On note K le nouvel ensemble d'intégration que l'on sépare en deux en notant Δ_n son intersection avec l'ensemble $\cap_j\{|s_j| \le n^{-\delta}\}$ où $0 < \delta < -\alpha$ et Δ'_n le complémentaire de Δ_n dans K :

$$\begin{aligned}\sum_{j,k\in A_n} r^2(k-j) &= n^d \int_{\Delta_n} f_X(x)f_X(x-s)\prod_{j=1}^d F_n(s_j)dxds \\ &\quad + n^d \int_{\Delta'_n} f_X(x)f_X(x-s)\prod_{j=1}^d F_n(s_j)dxds. \qquad (2.14)\end{aligned}$$

Traitons tout d'abord la seconde intégrale (2.14). Sur Δ'_n, il existe au moins un j tel que $|s_j| > n^{-\delta}$, l'integrand étant positif, on a

$$\begin{aligned}&\int_{\Delta'_n} f_X(x)f_X(x-s)\prod_{j=1}^d F_n(s_j)dxds \\ &\qquad\qquad \le \sum_{i=1}^d \int_{|s_i|>n^{-\delta}} f_X(x)f_X(x-s)\prod_{j=1}^d F_n(s_j)dxds.\end{aligned}$$

On sait que $|s_i| > n^{-\delta}$ implique $F_n(s_i) \le cn^{-1+2\delta}$ où c est une constante positive non nulle qui pourra par la suite varier de ligne à ligne. On a donc

$$\begin{aligned}\int_{\Delta'_n} & f_X(x) f_X(x-s) \prod_{j=1}^{d} F_n(s_j) dx ds \\ & \leq c \frac{1}{n^{1-2\delta}} \sum_{i=1}^{d} \int_K f_X(x) f_X(x-s) \prod_{j\neq i} F_n(s_j) dx ds \\ & \leq c \frac{1}{n^{1-2\delta}} \sum_{i=1}^{d} \int_K \left| \sum_{k=1}^{d} c_k x_k \right|^{\alpha} \left| \sum_{k=1}^{d} c_k (x_k - s_k) \right|^{\alpha} \prod_{j\neq i} F_n(s_j) dx ds. \end{aligned} \tag{2.15}$$

On effectue à présent dans (2.15) le changement de variables $u = \sum_{k=1}^{d} c_k x_k$, $y = \sum_{k=1}^{d} c_k s_k$ et, pour $j \neq i$, $v_j = \sum_{k=1}^{j} c_k x_k$ et $s_j = s_j$. On obtient

$$\int_{\Delta'_n} f_X(x) f_X(x-s) \prod_{j=1}^{d} F_n(s_j) dx ds \leq c \frac{1}{n^{1-2\delta}} \int_{K'} |u|^{\alpha} |u-y|^{\alpha} \prod_{j\neq i} F_n(s_j) du dy ds,$$

où K' est un compact de $\mathbb{R}^{d+1}$. Soit $K_1 \subset \mathbb{R}^2$ et $K_2 \subset \mathbb{R}^{d-1}$ deux cubes tels que $K' \subset K_1 \times K_2$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\Delta'_n} & f_X(x) f_X(x-s) \prod_{j=1}^{d} F_n(s_j) dx ds \\ & \leq c \frac{1}{n^{1-2\delta}} \int_{K_1} |u|^{\alpha} |u-y|^{\alpha} du dy \int_{K_2} \prod_{j\neq i} F_n(s_j) ds \leq c \frac{1}{n^{1-2\delta}}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

D'après (2.16) et comme $\delta < -\alpha$ on a

$$n^d \int_{\Delta'_n} f_X(x) f_X(x-s) \prod_{j=1}^{d} F_n(s_j) dx ds = o(n^{d-1-2\alpha}). \tag{2.17}$$

D'après (2.14) et (2.17),

$$\sum_{j,k \in A_n} r^2(k-j) = n^d \int_{\Delta_n} f_X(x) f_X(x-s) \prod_{j=1}^{d} F_n(s_j) dx ds + o(n^{d-1-2\alpha}) \tag{2.18}$$

Il nous reste à traiter l'intégrale dans (2.18). Pour tout $j = 1, \ldots, d$, on a

$$|s_j| \leq n^{-\delta} \Rightarrow |F_n(s_j)| \leq cn \frac{\sin^2(ns_j/2)}{(ns_j/2)^2}.$$

En utilisant cette propriété et en effectuant dans l'intégrale de (2.18) le changement de variables $u = \sum_{i=1}^{d} c_i x_i$, et, pour $j = 1, \ldots, d-1$, $v_j = \sum_{i=1}^{j} c_i x_i$, les

s_j restant inchangés, on obtient

$$n^d \int_{\Delta_n} f_X(x) f_X(x-s) \prod_{j=1}^{d} F_n(s_j) dx ds$$
$$\leq c n^{2d} \int_{K'} |u|^\alpha \left| u - \sum_{i=1}^{d} c_i s_i \right|^\alpha \prod_{j=1}^{d} \frac{\sin^2(ns_j/2)}{(ns_j/2)^2} ds du, \quad (2.19)$$

où K' est un compact de $\mathbb{R}^{d+1}$. On effectue enfin dans (2.19) le changement de variables $v = nu$ et $t_j = ns_j$ pour tout j et

$$n^d \int_{\Delta_n} f_X(x) f_X(x-s) \prod_{j=1}^{d} F_n(s_j) dx ds$$
$$\leq c n^{d-1-2\alpha} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} |v|^\alpha \left| v - \sum_{i=1}^{d} c_i t_i \right|^\alpha \prod_{j=1}^{d} \frac{\sin^2(t_j/2)}{(t_j/2)^2} dt dv. \quad (2.20)$$

On se sert à présent du lemme suivant :

Lemme 1. *Si $-1 < \alpha < -1/2$ et $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1 \dots d$,*

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} |x|^\alpha \left| x - \sum_{i=1}^{d} c_i y_i \right|^\alpha \prod_{j=1}^{d} \frac{\sin^2(y_j)}{y_j^2} dx dy_1 \dots dy_d < \infty. \quad (2.21)$$

Sa démonstration est donnée dans la section 4.2

La dernière intégrale dans (2.20) est finie d'après le lemme 1 et (2.18) et (2.20) montrent le résultat de la proposition 1 dans le cas $-1 < \alpha < -1/2$. □

Preuve du corollaire 2. Le théorème 4 ci-dessous nous donne, lorsque $n \to \infty$,

$$d_n^2 \sim n^{d-\alpha}. \quad (2.22)$$

En utilisant la proposition 1 on a donc, dans tous les cas,

$$d_n^{-2} \sum_{j,k \in A_n^2} r^2(k-j) = o(n^{-\eta}),$$

pour un $\eta > 0$. D'autre part, d'après (2.22), on a, pour tout $N \geq n$, $d_n^2/N^{2d} \to 0$ lorsque $N \to \infty$. L'inégalité (2.2) est vérifiée sous les hypothèses du corollaire et son majorant tend donc vers 0 lorsque N tend vers l'infini dès que $\delta < \eta$.

Le théorème 4 prouve par ailleurs la convergence des sommes partielles de $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ dans $\mathcal{D}([0,1]^d)$ vers $B \in C([0,1]^d)$. En utilisant le même argument que dans la démonstration du corollaire 1 qui s'appuie sur cette convergence dans $\mathcal{D}([0,1]^d)$ et sur la nullité asymptotique du majorant dans (2.2), on obtient la convergence annoncée. □

3 Convergence des sommes partielles dans $\mathcal{D}\left([0,1]^d\right)$

Pour les champs gaussiens à longue mémoire régulière vérifiant (1.2), la convergence des lois fini-dimensionnelles des sommes partielles a été montrée par Dobrushin and Major (1979). Pour les champs à longue mémoire non-régulière, cette convergence a été établie par Lavancier (2003). Nous montrons ici l'équitension de ces sommes partielles dans $\mathcal{D}([0,1]^d)$, ce qui entraîne leur convergence en loi dans cet espace ce qui, on l'a vu, fournit la loi convergence du processus empirique doublement indexé.

Les preuves sont basées sur un critère d'équitension dans $\mathcal{D}\left([0,1]^d\right)$ pour les champs.

Soit $B = [s_1, t_1[\times \cdots \times [s_d, t_d[$ un sous ensemble de $[0,1]^d$ et soit S_n un processus dans $\mathcal{D}\left([0,1]^d\right)$. On note $S_n(B)$ la quantité

$$S_n(B) = \sum_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_d = 0,1} (-1)^{d + \sum_{i=1}^d \varepsilon_i} S\left(s_1 + \varepsilon_1(t_1 - s_1), \ldots, s_d + \varepsilon_d(t_d - s_d)\right). \tag{3.1}$$

Les thèorèmes 2 et 3 de Bickel and Wichura (1971) nous donnent le critère suivant.

Théorème 2 (Bickel and Wichura (1971)). *Soit $S_n(t)$, $t \in [0,1]^d$, un processus de $\mathcal{D}\left([0,1]^d\right)$ dont les lois fini-dimensionnelles convergent en loi vers celle d'un processus $X(t)$.*

On suppose que $X(t)$ est continu en $t = 1$ et que $S_n(0) = 0$.

Si il existe $\beta > 1$, $\gamma > 1$ et une mesure finie positive μ sur $[0,1]^d$ tels que, pour tous $B = [s_1, t_1[\times \cdots \times [s_d, t_d[$ et $C = [s'_1, t'_1[\times \cdots \times [s'_d, t'_d[$,

$$\forall n \quad E\left(|S_n(B)|^{\gamma_1} |S_n(C)|^{\gamma_2}\right) \leq \left(\mu(B)\right)^{\beta_1} \left(\mu(C)\right)^{\beta_2}, \tag{3.2}$$

avec $\beta_1 + \beta_2 = \beta$, $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$, où $S_n(B)$ et $S_n(C)$ sont définis par (3.1), alors

$$S_n \overset{\mathcal{D}\left([0,1]^d\right)}{\longrightarrow} X.$$

Le corollaire suivant, dont les conditions sont plus pratiques à vérifier, concerne le cas particulier où S_n est le processus des sommes partielles d'un champ aléatoire stationnaire.

Corollaire 3. *On considère un champ aléatoire stationnaire $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ et ses sommes partielles*

$$S_n(t) = d_n^{-1} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \ldots, k_d}, \quad t \in [0,1]^d,$$

où $[.]$ designe la partie entière.

Si S_n converge au sens des lois fini-dimensionnelles vers X et s'il existe $c > 0$ et $\beta > 1$ tel que pour tous $p_1, \dots, p_d \in \{1, \dots, n\}$

$$E\left(d_n^{-1} \sum_{k_1=0}^{p_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{p_d} X_{k_1,\dots,k_d}\right)^2 \leq c\left(\prod_{i=1}^{d} \frac{p_i}{n}\right)^{\beta}, \tag{3.3}$$

alors

$$S_n \overset{\mathcal{D}\left([0,1]^d\right)}{\longrightarrow} X.$$

De plus le champ X admet une version à trajectoires continues.

Démonstration. Bickel and Wichura (1971) montrent en remarque de leur théorème 3 qu'il suffit de vérifier la condition (3.2) pour les ensembles du type $B = [i_1/n, j_1/n[\times \cdots \times [i_d/n, j_d/n[\ (i_l, j_l = 0 \dots n, \ l = 1, \dots, d)$. Dans le cas $d = 2$, d'après (3.1) on a

$$\begin{aligned}
&S_n\left(\left[\frac{i_1}{n}, \frac{j_1}{n}\right[\times \left[\frac{i_2}{n}, \frac{j_2}{n}\right[\right) \\
&= S_n\left(\frac{i_1}{n}, \frac{i_2}{n}\right) - S_n\left(\frac{j_1}{n}, \frac{i_2}{n}\right) - S_n\left(\frac{i_1}{n}, \frac{j_2}{n}\right) + S_n\left(\frac{j_1}{n}, \frac{j_2}{n}\right) \\
&= d_n^{-1}\left(\sum_{k_1=0}^{i_1}\sum_{k_2=0}^{i_2} X_{k_1,k_2} - \sum_{k_1=0}^{j_1}\sum_{k_2=0}^{i_2} X_{k_1,k_2} - \sum_{k_1=0}^{i_1}\sum_{k_2=0}^{j_2} X_{k_1,k_2} + \sum_{k_1=0}^{j_1}\sum_{k_2=0}^{j_2} X_{k_1,k_2}\right) \\
&= d_n^{-1} \sum_{k_1=i_1}^{j_1}\sum_{k_2=i_2}^{j_2} X_{k_1,k_2}.
\end{aligned}$$

On obtient par récurrence le même résultat quel que soit d

$$S_n(B) = d_n^{-1} \sum_{k_1=i_1}^{j_1} \cdots \sum_{k_d=i_d}^{j_d} X_{k_1,\dots,k_d}.$$

Si $C = [i'_1/n, j'_1/n[\times \cdots \times [i'_d/n, j'_d/n[$, en utilisant l'inégalité de Schwartz et la stationnarité de X, on obtient

$$\begin{aligned}
&\Big[E\left(|S_n(B)||S_n(C)|\right)\Big]^2 \\
&\quad \leq E\left(\frac{1}{d_n}\sum_{k_1=i_1}^{j_1} \cdots \sum_{k_d=i_d}^{j_d} X_{k_1,\dots,k_d}\right)^2 E\left(\frac{1}{d_n}\sum_{k_1=i'_1}^{j'_1} \cdots \sum_{k_d=i'_d}^{j'_d} X_{k_1,\dots,k_d}\right)^2 \\
&\quad \leq E\left(\frac{1}{d_n}\sum_{k_1=0}^{j_1-i_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{j_d-i_d} X_{k_1,\dots,k_d}\right)^2 E\left(\frac{1}{d_n}\sum_{k_1=0}^{j'_1-i'_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{j'_d-i'_d} X_{k_1,\dots,k_d}\right)^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, si (3.3) est vraie, alors la condition (3.2) est remplie avec $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $2\beta_1 = 2\beta_2 = \beta$ et μ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]^d$ (à un facteur multiplicatif près). La continuité du champ aléatoire limite X est montrée dans le lemme ci-dessous. En remarquant enfin que $S_n(0) = 0$, toutes les conditions du théorème 2 sont remplies et la convergence annoncée dans le corollaire s'en déduit. $\square$

Lemme 2. *Sous les hypothèses du corollaire 3, le processus limite X admet une version continue.*

Démonstration. Le processus X appartenant à $\mathcal{D}([0,1]^d)$, il suffit de montrer la continuité en probabilité en chaque point i.e.

$$\forall s \in [0,1]^d \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{t \to s} P(|X(s) - X(t)| > \varepsilon) = 0. \tag{3.4}$$

D'après la convergence des lois fini-dimensionnelles de S_n vers X

$$\begin{aligned} P(|X(s) - X(t)| > \varepsilon) &\leq \liminf_{n\to\infty} P(|S_n(s) - S_n(t)| > \varepsilon) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \varepsilon^{-2} E(S_n(s) - S_n(t))^2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Or

$$E(S_n(s) - S_n(t))^2 = E\left(d_n^{-1} \sum_{k_1=0}^{[ns_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[ns_d]} X_k - d_n^{-1} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_k\right)^2.$$

On décompose les ensembles de sommation de la façon suivante

$$\prod_{j=1}^d \Big\{0, \ldots, [ns_j]\Big\} = \prod_{j=1}^d \Big\{0, \ldots, [nt_j] \wedge [ns_j]\Big\} \cup \Big\{[nt_j] \wedge [ns_j] + 1, \ldots, [ns_j]\Big\},$$

en posant $\Big\{[ns_j] + 1, [ns_j]\Big\} = \emptyset$. En développant cela donne

$$\begin{aligned} &\prod_{j=1}^d \Big\{0, \ldots, [ns_j]\Big\} \\ &\quad = \bigcup_{l=1}^d \bigcup_{C_d^l} \prod_{j \in C_d^l} \Big\{0, \ldots, [nt_j] \wedge [ns_j]\Big\} \prod_{j \in \overline{C_d^l}} \Big\{[nt_j] \wedge [ns_j] + 1, \ldots, [ns_j]\Big\}, \end{aligned}$$

où C_d^l est l'ensemble des l-uplets de $\{1, \ldots, d\}$ et $\overline{C_d^l}$ son complémentaire dans $\{1, \ldots, d\}$. On peut à présent réecrire $S_n(s) - S_n(t)$ en utilisant cette décomposition et les termes en $l = d$ s'annulent :

$$\begin{aligned} &S_n(s) - S_n(t) = \\ &\frac{1}{d_n} \sum_{l=1}^{d-1} \sum_{C_d^l} \sum_{\substack{j \in C_d^l \\ j' \in \overline{C}_d^l}} \left(\sum_{k_j=0}^{[nt_j]\wedge[ns_j]} \sum_{k_{j'}=[nt_{j'}]\wedge[ns_{j'}]+1}^{[ns_{j'}]} X_k - \sum_{k_j=0}^{[nt_j]\wedge[ns_j]} \sum_{k_{j'}=[nt_{j'}]\wedge[ns_{j'}]+1}^{[nt_{j'}]} X_k \right). \end{aligned}$$

En utilisant la convexité de $x \mapsto x^2$ on a

$$
\begin{aligned}
&E\left(S_n(s)-S_n(t)\right)^2 \\
&\quad \leq 2(2^d-1)\sum_{l=1}^{d-1}\sum_{C_d^l} E\left(d_n^{-1}\sum_{\substack{j\in C_d^l\\ j'\in \overline{C}_d^l}}\ \sum_{k_j=0}^{[nt_j]\wedge[ns_j]}\ \sum_{k_{j'}=[nt_{j'}]\wedge[ns_{j'}]+1}^{[ns_{j'}]} X_k\right)^2 \\
&\quad + 2(2^d-1)\sum_{l=1}^{d-1}\sum_{C_d^l} E\left(d_n^{-1}\sum_{\substack{j\in C_d^l\\ j'\in \overline{C}_d^l}}\ \sum_{k_j=0}^{[nt_j]\wedge[ns_j]}\ \sum_{k_{j'}=[nt_{j'}]\wedge[ns_{j'}]+1}^{[nt_{j'}]} X_k\right)^2 .
\end{aligned}
$$

On utilise finalement la stationarité de $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ afin d'appliquer (3.3)

$$
\begin{aligned}
&E\big(S_n(s)-S_n(t)\big)^2 \\
&\quad \leq c\sum_{l=1}^{d-1}\sum_{C_d^l}\left(\prod_{j\in C_d^l}\frac{[nt_j]\wedge[ns_j]}{n}\right)^{\beta}\left(\prod_{j\in\overline{C_d^l}}\frac{[ns_j]-[nt_j]\wedge[ns_j]}{n}\right)^{\beta} \\
&\qquad + c\sum_{l=1}^{d-1}\sum_{C_d^l}\left(\prod_{j\in C_d^l}\frac{[nt_j]\wedge[ns_j]}{n}\right)^{\beta}\left(\prod_{j\in\overline{C_d^l}}\frac{[nt_j]-[nt_j]\wedge[ns_j]}{n}\right)^{\beta} \\
&\quad \leq c\sum_{l=1}^{d-1}\sum_{C_d^l}\prod_{j\in C_d^l}(t_j\wedge s_j)^{\beta}\left(\prod_{j\in\overline{C_d^l}}\left(s_j-t_j\wedge s_j+\frac{1}{n}\right)^{\beta}\right. \\
&\qquad\qquad \left. +\prod_{j\in\overline{C_d^l}}\left(t_j-t_j\wedge s_j+\frac{1}{n}\right)^{\beta}\right), \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

où $\beta > 1$ et c une constante strictement positive. Finalement d'après (3.5) et (3.6)

$$
\begin{aligned}
&P(|X(s)-X(t)|>\varepsilon) \\
&\quad \leq c\varepsilon^{-2}\sum_{l=1}^{d-1}\sum_{C_d^l}\prod_{j\in C_d^l}(t_j\wedge s_j)^{\beta}\left(\prod_{j\in\overline{C_d^l}}(s_j-t_j\wedge s_j)^{\beta}+\prod_{j\in\overline{C_d^l}}(t_j-t_j\wedge s_j)^{\beta}\right),
\end{aligned}
$$

qui converge vers 0 quand $t \to s$ car $\overline{C_d^l}$ n'est jamais vide lorsque $l \leq d-1$. $\square$

3.1 Longue mémoire régulière

Le théorème suivant complète celui de Dobrushin and Major (1979) en étendant la convergence fini-dimensionnelle des sommes partielles en une convergence fonctionnelle dans $\mathcal{D}\left([0,1]^d\right)$.

Théorème 3. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire gaussien stationnaire centré. Soit H une fonction mesurable et m son rang de Hermite.*

On suppose que (X_n) admet comme fonction de covariance

$$r(k) = |k|^{-\alpha} L(|k|) b\left(\frac{k}{|k|}\right), \tag{3.7}$$

avec $r(0) = 1$, où $0 < m\alpha < d$ et où L est une fonction à variation lente à l'infini et b une fonction continue sur la sphère unité de $\mathbb{R}^d$.

Alors

$$\frac{1}{N^{d-m\alpha/2}(L(N))^{m/2}} \sum_{j\in A_{[Nt]}} H(X_j) \overset{\mathcal{D}([0,1]^d)}{\Longrightarrow} Z_m(t),$$

où Z_m est le processus de Hermite de degré m défini par (2.8).

Démonstration. La convergence des lois fini-dimensionnelles est traitée dans Dobrushin and Major (1979), il reste donc à prouver l'équitension des sommes partielles pour conclure à la convergence dans $\mathcal{D}\left([0,1]^d\right)$. Pour ce faire, on utilise le corollaire 3 et l'on doit évaluer, pour $p_1, \ldots, p_d \in \{1, \ldots, N\}$,

$$E\left(\frac{1}{N^{d-m\alpha/2}(L(N))^{m/2}} \sum_{k_1=0}^{p_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{p_d} H(X_k)\right)^2. \tag{3.8}$$

En utilisant la décomposition de $H(X_k)$ dans la base de Hermite

$$H(X_k) = \sum_{i=m}^{\infty} \frac{J_i}{i!} H_i(X_k),$$

où

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \frac{J_i^2}{i!} < \infty, \tag{3.9}$$

et la relation

$$cov(H_k(X_i), H_l(X_j)) = \delta_{k,l} k! r(j-i)^k,$$

où H_k est le polynôme de Hermite d'ordre k, on obtient

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{k_1=0}^{p_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{p_d} H(X_k)\right)^2 &= \sum_{k,l=0}^{p_1\ldots p_d} \sum_{i=m}^{\infty} \frac{J_i^2}{i!} r^i(l-k) \\ &\le \sum_{k,l=0}^{p_1\ldots p_d} r^m(l-k) \sum_{i=m}^{\infty} \frac{J_i^2}{i!} \\ &\le c \sum_{k,l=0}^{p_1\ldots p_d} r^m(l-k), \end{aligned}$$

car $0 \leq r(l-k) \leq 1$ et en utilisant (3.9), c étant une constante strictement positive qui pourra varier par la suite de ligne à ligne. On a donc

$$\begin{aligned} & E\Big(\sum_{k_1=0}^{p_1} \dots \sum_{k_d=0}^{p_d} H(X_k)\Big)^2 \\ & \qquad \leq c \sum_{k=-p_1+1,\dots,-p_d+1}^{p_1-1,\dots,p_d-1} |k|^{-m\alpha} L(|k|)^m b^m \left(\frac{k}{|k|}\right) \prod_{j=1}^{d} (p_j - |k_j|) \\ & \qquad \leq c \prod_{j=1}^{d} p_j \left(1 + 2^d \sum_{k=1}^{p_1,\dots,p_d} (|k|)^{-m\alpha} L(|k|)^m\right), \end{aligned} \tag{3.10}$$

la fonction b étant bornée.

On utilise à présent l'inégalité (2.5) relative aux fonctions à variation lente pour $y = |k| = k_1 + \cdots + k_d$ et $x = dN$ en choisissant

$$\eta = \frac{d}{2m} - \frac{\alpha}{2} > 0. \tag{3.11}$$

Nous utilisons de plus le fait que la moyenne arithmétique de quantités positives est toujours supérieure à leur moyenne géométrique et (3.10) est majoré par

$$\begin{aligned} & c \prod_{j=1}^{d} p_j \left(1 + \sum_{k=1}^{p_1,\dots,p_d} \prod_{j=1}^{d} k_j^{-(\alpha+\eta)m/d} L(dN)^m N^{m\eta}\right) \\ & \qquad \leq c \prod_{j=1}^{d} p_j \left(1 + L(dN)^m N^{m\eta} \prod_{j=1}^{d} p_j^{-(\alpha+\eta)m/d+1}\right). \end{aligned}$$

Ainsi (3.8) est majorée par

$$\begin{aligned} & cN^{m\alpha-2d} L(N)^{-m} \left(\prod_{j=1}^{d} p_j + L(dN)^m N^{m\eta} \prod_{j=1}^{d} p_j^{-(\alpha+\eta)m/d+2}\right) \\ & \qquad \leq c \left(\frac{L(dN)}{L(N)}\right)^m \prod_{j=1}^{d} \left(\frac{p_j}{N}\right)^\beta \left(N^{-m\eta} L(dN)^{-m} \prod_{j=1}^{d} p_j^{1-\beta} + 1\right), \end{aligned} \tag{3.12}$$

avec $\beta = -(\alpha+\eta)m/d + 2$. D'après (3.11) et comme $0 < m\alpha < d$, on a $\beta > 1$. Ceci montre par ailleurs que le terme entre parenthèses dans (3.12) reste borné. De plus L étant une fonction à variations lentes, $L(dN)/L(N)$ est borné. Ainsi

$$\forall (p_1, \dots, p_d) \in \{1, \dots, n\}^d,$$

$$E\left(\frac{1}{N^{d-m\alpha/2}(L(N))^{m/2}} \sum_{k_1=0}^{p_1} \dots \sum_{k_d=0}^{p_d} H(X_k)\right)^2 \leq c \left(\prod_{j=1}^{d} \frac{p_j}{N}\right)^\beta,$$

avec $\beta > 1$ et la condition (3.3) du corollaire 3 est vérifiée. □

3.2 Longue mémoire non-régulière

Le théorème suivant complète la convergence des lois fini-dimensionnelles du processus des sommes partielles établie dans Lavancier (2003) en l'étendant à $\mathcal{D}([0,1]^d)$.

Théorème 4. *Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ un champ stationnaire de densité spectrale bornée. On considère le champ linéaire*

$$X_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k \varepsilon_{n-k}, \tag{3.13}$$

où les (a_k) sont les coefficients de Fourier du filtre

$$a(\lambda) = \left|\sum_{i=1}^d c_i\lambda_i\right|^{\alpha/2}, \quad -1 < \alpha < 0, \tag{3.14}$$

où $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ et $(c_1, \ldots, c_d) \in \mathbb{R}^d$. Alors, quel que soit $-1 < \alpha < 0$ lorsque $d \leq 3$ et sous la restriction $-\frac{1}{d-2} < \alpha < 0$ lorsque $d \geq 4$,

$$\frac{1}{n^{d/2-\alpha/2}} \sum_{j_1=1}^{[nt_1]} \cdots \sum_{j_d=1}^{[nt_d]} X_j \overset{\mathcal{D}([0,1]^d)}{\Longrightarrow} B(t),$$

où $B \in C([0,1]^d)$ n'admet pas de forme explicite dans le cas général mais dans le cas particulier où ε est un bruit blanc fort il vaut :

$$B(t) = \int_{\mathbb{R}^d} a(u) \prod_{j=1}^d \frac{e^{it_ju_j}-1}{iu_j} dW(u),$$

où $u = (u_1, \ldots, u_d)$ et W est le champ spectral associée au bruit blanc gaussien.

Remarque 2. Dans le théorème précédent, X n'est pas supposé gaussien. La convergence des sommes partielles est obtenue sans cette hypothèse. Par contre le résultat de convergence de son processus empirique, établi dans le corollaire 2, se restreint au cas gaussien car il s'appuie sur l'inégalité (2.2) montrée dans ce cadre.

Démonstration. La convergence des lois fini-dimensionnelles est montrée dans Lavancier (2003). Montrons l'équitension des sommes partielles en utilisant le corollaire 3. En posant W le champ spectral de ε, on écrit les sommes partielles du champ linéaire X de la façon suivante :

$$\forall (p_1, \ldots, p_d) \in \{1, \ldots, n\}^d,$$
$$\sum_{k=0}^{p_1\cdots p_q} X_k = \int_{[-\pi,\pi]^d} \left|\sum_{i=1}^d c_i\lambda_i\right|^{\alpha} \prod_{j=1}^d \frac{e^{i\lambda_j p_j}-1}{(e^{i\lambda_j}-1)} dW(\lambda). \tag{3.15}$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
E\left(\sum_{k=0}^{p_1\dots p_q} X_k\right)^2 &= \int_{[-\pi,\pi]^d} \left|\sum_{i=1}^d c_i\lambda_i\right|^{2\alpha} \prod_{j=1}^d \frac{\sin^2(p_j\lambda_j/2)}{\sin^2(\lambda_j/2)} d\lambda \\
&= \prod_{j=1}^d \frac{1}{p_j} \int_{\prod_{j=1}^d [-p_j\pi, p_j\pi]} \left|\sum_{i=1}^d c_i \frac{\lambda_i}{p_i}\right|^{2\alpha} \prod_{j=1}^d \frac{\sin^2(\lambda_j/2)}{\sin^2(\lambda_j/2p_j)} d\lambda \\
&\le p_1^{1-2\alpha} \prod_{j=2}^d p_j \int_{\mathbb{R}^d} \left| c_1\lambda_1 + \sum_{i=2}^d \frac{c_i p_1}{p_i}\lambda_i\right|^{2\alpha} \prod_{j=1}^d \frac{\sin^2(\lambda_j/2)}{(\lambda_j/2)^2} d\lambda.
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

L'intégrale dans (3.16) est finie. On peut le vérifier en effectuant le changement de variables $u = c_1\lambda_1 + \sum_{i=2}^d \frac{c_i p_1}{p_i}\lambda_i$ et $\lambda_i = \lambda_i$ pour $i \ge 2$ sur le domaine $\{|u| < 1\}$, l'intégrabilité sur $\{|u| > 1\}$ étant évidente.

En notant c une constante strictement positive, on a donc montré

$$
E\left(n^{\alpha-d/2}\sum_{k=0}^{p_1\dots p_q} X_k\right)^2 \le c n^{2\alpha-d} p_1^{1-2\alpha} \prod_{j=2}^d p_j.
$$

Cette inégalité reste vraie en permutant les p_j entre eux, ansi

$$
\begin{aligned}
E\left(n^{\alpha-d/2}\sum_{k=0}^{p_1\dots p_q} X_k\right)^2 &\le c n^{2\alpha-d} \min_{i=1,\dots,d}\left\{p_i^{1-2\alpha}\prod_{j\ne i} p_j\right\} \\
&\le c n^{2\alpha-d} p_-^{1-2\alpha} \prod_{p_j\ne p_-} p_j = c\left(\frac{p_-}{n}\right)^{1-2\alpha} \prod_{p_j\ne p_-} \frac{p_j}{n},
\end{aligned}
$$

en notant $p_- = \min\{p_j\}$. Un passage au logarithme montre facilement que

$$
\left(\frac{p_-}{n}\right)^{1-2\alpha} \prod_{p_j\ne p_-} \frac{p_j}{n} \le \left(\prod_{j=1}^d \frac{p_j}{n}\right)^{1-2\alpha/d}.
$$

On obtient donc finalement

$$
\forall (p_1,\dots,p_d) \in \{1,\dots,n\}^d, \quad E\left(n^{\alpha-d/2}\sum_{k=0}^{p_1\dots p_q} X_k\right)^2 \le c\left(\prod_{j=1}^d \frac{p_j}{n}\right)^{\beta},
$$

où $\beta = 1 - 2\alpha/d > 1$. La condition (3.3) du corollaire 3 est donc vérifiée et la convergence des sommes partielles dans $\mathcal{D}\left([0,1]^d\right)$ ainsi que la continuité des trajectoires de B en sont des conséquences. $\square$

4 Preuves du théorème 1 et du lemme 1

4.1 Preuve du théorème 1

Démonstration. Le schéma de preuve est classique, il utilise l'argument de chaînage de Dehling and Taqqu (1989). On notera dans la suite, pour une fonction f, $f(x,y) = f(y) - f(x)$.

On montre dans un premier temps le lemme suivant.

Lemme 3.
$$E\left(S_n^2(x,y)\right) \leq F(x,y) \sum_{j,k \in A_N^2} |r(k-j)|^{m+1} \tag{4.1}$$

Démonstration du lemme.

$$\begin{aligned} S_n(x,y) &= \sum_{j \in A_n} \left[I_{\{x<G(X_j)\leq y\}} - F(x,y) - \frac{J_m(x,y)}{m!} H_m(X_j) \right] \\ &= \sum_{j \in A_n} \sum_{q=m+1}^{\infty} \frac{J_q(x,y)}{q!} H_q(X_j). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E\left(S_n^2(x,y)\right) &= \sum_{j,k \in A_n^2} \sum_{q=m+1}^{\infty} \frac{J_q^2(x,y)}{(q!)^2} E\left(H_q(X_j) H_q(X_k)\right) \\ &= \sum_{q=m+1}^{\infty} \frac{J_q^2(x,y)}{q!} \sum_{j,k \in A_n^2} r^q(k-j) \\ &\leq \sum_{q=m+1}^{\infty} \frac{J_q^2(x,y)}{q!} \sum_{j,k \in A_n^2} |r(k-j)|^q \\ &\leq \sum_{q=m+1}^{\infty} \frac{J_q^2(x,y)}{q!} \sum_{j,k \in A_n^2} |r(k-j)|^{m+1}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{q=m+1}^{\infty} \frac{J_q^2(x,y)}{q!} &\leq E(\left(I_{\{x<G(X_j)\leq y\}} - F(x,y)\right)^2 \\ &= F(x,y)(1-F(x,y)) \leq F(x,y). \end{aligned}$$

□

Définissons
$$\Lambda(x) = F(x) + \int_{G(s)\leq x} \frac{|H_m(s)|}{m!} \Phi(s) ds, \tag{4.2}$$
où Φ est la densité d'une normale standard. C'est une fonction positive, croissante et bornée. D'autre part, $F(x,y)$ et $(1/m!)J_m(x,y)$ sont bornées par $\Lambda(x,y)$.

On pose $x_i(k) = \inf\{x : \Lambda(x) \geq \Lambda(\infty) i 2^{-k}\}$ pour $i = 0, \ldots, 2^k - 1$. Ainsi les $x_i(k)$ constituent, à k fixé, une partition de $\mathbb{R}$. Pour tout x et tout $k = 0, \ldots, K$ où K sera choisi plus tard, on définit $i_k(x)$ par

$$x_{i_k(x)}(k) \leq x < x_{i_k(x)+1}(k).$$

On peut ainsi définir une chaîne liant chaque point x à $-\infty$:

$$-\infty = x_{i_0(x)}(0) \leq \cdots \leq x_{i_K(x)}(K) \leq x < x_{i_K(x)+1}(K).$$

On utilise ce chaînage pour étudier $S_n(x)$:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{K-1} S_n\left(x_{i_k(x)}(k), x_{i_{k+1}(x)}(k+1)\right) + S_n\left(x_{i_K(x)}(K), x\right). \tag{4.3}$$

On traite dans un premier temps le dernier terme de (4.3). Pour une fonction f, on note $f(x^-)$ sa limite à gauche en x. On a toujours

$$\Lambda(x_{i-1}(k), x_i^-(k)) \leq \Lambda(\infty) 2^{-k}. \tag{4.4}$$

Comme $x < x_{i_K(x)+1}(K)$ et $(1/m!)J_m(x,y) \leq \Lambda(x,y)$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|S_n\big(x_{i_K(x)}(K), x\big)\right| \\
&\quad \leq \sum_{j\in A_n} \left(I_{\{}x_{i_K(x)}(K) < Y_j \leq x\} + F\left(x_{i_K(x)}(K), x\right)\right) \\
&\qquad + \left|\frac{1}{m!} J_m(x_{i_K(x)}(K), x)\right| \left|\sum_{j\in A_n} H_m(X_j)\right| \\
&\quad \leq \sum_{j\in A_n} \left[I_{\{}x_{i_K(x)}(K) < Y_j \leq x_{i_K(x)+1}(K)\} + F\left(x_{i_K(x)}(K), x^-_{i_K(x)+1}(K)\right)\right] \\
&\qquad + \Lambda(x_{i_K(x)}(K), x^-_{i_K(x)+1}(K)) \left|\sum_{j\in A_n} H_m(X_j)\right|.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
&\left|S_n\left(x_{i_K(x)}(K), x\right)\right| \\
&\quad \leq \left|S_n(x_{i_K(x)}(K), x^-_{i_K(x)+1}(K))\right| + 2n^d F(x_{i_K(x)}(K), x^-_{i_K(x)+1}(K)) \\
&\qquad\qquad + 2\Lambda(x_{i_K(x)}(K), x^-_{i_K(x)+1}(K)) \left|\sum_{j\in A_n} H_m(X_j)\right|.
\end{aligned}$$

Finalement, d'après (4.4) et car $F(x,y) \le \Lambda(x,y)$

$$\begin{aligned}\left|S_n\left(x_{i_K(x)}(K),x\right)\right| \le &\left|S_n(x_{i_K(x)}(K),x^-_{i_K(x)+1}(K))\right| \\ &+ 2\Lambda(\infty)n^d 2^{-K} + 2\Lambda(\infty)2^{-K}\left|\sum_{j\in A_n} H_m(X_j)\right|. \quad (4.5)\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon}{(k+3)^2} \le \frac{\varepsilon}{2}$, d'après (4.3) et (4.5),

$$\begin{aligned}&P\left(\sup_x d_N^{-1}\left|S_n(x)\right| > \varepsilon\right) \quad (4.6)\\ &\le \sum_{k=0}^{K-1} P\left(\sup_x d_N^{-1}\left|S_n\left(x_{i_k(x)}(k),x_{i_{k+1}(x)}(k+1)\right)\right| > \frac{\varepsilon}{(k+3)^2}\right)\\ &\quad + P\left(\sup_x d_N^{-1}\left|S_n\left(x_{i_K(x)}(K),x^-_{i_{K(x)+1}}(K)\right)\right| > \frac{\varepsilon}{(K+3)^2}\right)\\ &\quad + P\left(2\Lambda(\infty)2^{-K}d_N^{-1}\left|\sum j\in A_n H_m(X_j)\right| > \frac{\varepsilon}{2} - 2\Lambda(\infty)n^d d_N^{-1}2^{-K}\right)\end{aligned}$$

Les partitions construites ci-dessus impliquent que les points $x_{i_k(x)}(k)$ et $x_{i_{k+1}(x)}(k+1)$ sont soit égaux, soit voisins dans la partition associée à $k+1$. Ainsi, si pour tout $i = 0,\dots,2^{k+1}-1$,

$$d_N^{-1}S_n(x_i(k+1),x_{i+1}(k+1)) \le \frac{\varepsilon}{(k+3)^2},$$

alors

$$\sup_x d_N^{-1}\left|S_n(x_{i_k(x)}(k),x_{i_{k+1}(x)}(k+1))\right| \le \frac{\varepsilon}{(k+3)^2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{K-1} P\left(\sup_x d_N^{-1}\left|S_n\left(x_{i_k(x)}(k),x_{i_{k+1}(x)}(k+1)\right)\right| > \frac{\varepsilon}{(k+3)^2}\right)\\ &\quad\le \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} P\left(d_N^{-1}S_n(x_i(k+1),x_{i+1}(k+1)) > \frac{\varepsilon}{(k+3)^2}\right)\\ &\quad\le \sum_{k=0}^{K-1}\frac{(k+3)^4}{\varepsilon^2}d_N^{-2}\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} E\left(S_n^2(x_i(k+1),x_{i+1}(k+1))\right),\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Chebyshev. En utilisant (4.1)

$$\sum_{k=0}^{K-1} P\left(\sup_x d_N^{-1}\left|S_n\left(x_{i_k(x)}(k), x_{i_{k+1}(x)}(k+1)\right)\right| > \frac{\varepsilon}{(k+3)^2}\right)$$

$$\leq \varepsilon^{-2} d_N^{-2} \sum_{j,k\in A_n^2} |r(k-j)|^{m+1} \sum_{k=0}^{K-1} (k+3)^4 \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} F(x_i(k+1), x_{i+1}(k+1))$$

$$\leq \varepsilon^{-2} d_N^{-2} \sum_{j,k\in A_n^2} |r(k-j)|^{m+1} \sum_{k=0}^{K-1} (k+3)^4. \tag{4.7}$$

On obtient la même majoration pour le second terme de (4.6) :

$$P\left(\sup_x d_N^{-1}\left|S_n\left(x_{i_K(x)}(K), x^-_{i_{K(x)+1}}(K)\right)\right| > \frac{\varepsilon}{(K+3)^2}\right)$$
$$\leq \varepsilon^{-2} d_N^{-2} \sum_{j,k\in A_n^2} |r(k-j)|^{m+1} (K+3)^4. \tag{4.8}$$

Maintenant, en choisissant $\alpha > 0$ assez grand pour garantir

$$\frac{N^{d-\alpha}}{d_N} \leq \frac{1}{8\Lambda_\infty},$$

on choisit

$$K = \left[\log_2\left(\frac{N^\alpha}{\varepsilon}\right)\right] + 1.$$

On a alors, puisque $n \leq N$,

$$2\Lambda_\infty n^d d_N^{-1} 2^{-K} \leq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.9}$$

Et donc, d'après (4.9) et la définition (2.1) de d_n,

$$P\left(2\Lambda_\infty 2^{-K} d_N^{-1}\left|\sum_{j\in A_n} H_m(X_j)\right| > \frac{\varepsilon}{2} - 2\Lambda_\infty n^d d_N^{-1} 2^{-K}\right)$$

$$\leq P\left(d_N^{-1}\left|\sum_{j\in A_n} H_m(X_j)\right| > \frac{\varepsilon}{4}\frac{2^{K-1}}{\Lambda_\infty}\right)$$

$$\leq 2^{-2K+2}\Lambda_\infty^2 16\varepsilon^{-2} d_N^{-2} Var\left(\sum_{j\in A_n} H_m(X_j)\right)$$

$$\leq \frac{d_n^2}{N^{2d}}. \tag{4.10}$$

Finalement, d'après (4.6) et par (4.7), (4.8) et (4.10),

$$\begin{aligned} P\left(\sup_x d_N^{-1}\left|S_n(x)\right|>\varepsilon\right) &\le \varepsilon^{-2}d_N^{-2}\sum_{j,k\in A_n^2}\left|r(k-j)\right|^{m+1}\sum_{k=0}^{K}(k+3)^4+\frac{d_n^2}{N^{2d}} \\ &\le C\varepsilon^{-2}d_N^{-2}\sum_{j,k\in A_n^2}\left|r(k-j)\right|^{m+1}(K+3)^5+\frac{d_n^2}{N^{2d}}, \end{aligned}$$

où C est une constante positive. On a par ailleurs, pour tout $\delta>0$,

$$(K+3)^5 \le \left(\log_2\left(\frac{N^\alpha}{\varepsilon}\right)+1\right)^5 \le C(\varepsilon)N^\delta,$$

où $C(\varepsilon)$ est une constante positive qui dépend de ε. Ainsi, pour tout $\delta>0$,

$$P\left(\sup_x d_N^{-1}\left|S_n(x)\right|>\varepsilon\right) \le C(\varepsilon)N^\delta d_N^{-2}\sum_{j,k\in A_n^2}\left|r(k-j)\right|^{m+1}+\frac{d_n^2}{N^{2d}}.$$

□

4.2 Preuve du lemme 1

Démonstration. Si tous les c_j sont nuls le lemme est vrai de façon évidente. Supposons qu'au moins un c_j est non nul et posons, dans (2.21), $x=u\sum_{i=1}^d c_iy_i$, les y_j restant inchangés. L'intégrale (2.21) est alors inférieure à une constante multiplicative près à

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^{d+1}}\prod_{j=1}^d(1\wedge y_j^{-2})\left|\sum_{i=1}^d c_iy_i\right|^{2\alpha+1}|u|^\alpha|u-1|^\alpha dy_1\dots dy_d du \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\prod_{j=1}^d(1\wedge y_j^{-2})\left|\sum_{i=1}^d c_iy_i\right|^{2\alpha+1}dy_1\dots dy_d\int_{\mathbb{R}}|u|^\alpha|u-1|^\alpha du. \end{aligned}$$

La seconde intégrale est finie puisque $-1<\alpha<-1/2$. Il reste à montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d}\prod_{j=1}^d(1\wedge y_j^{-2})\left|\sum_{i=1}^d c_iy_i\right|^{2\alpha+1}dy<\infty.$$

On découpe l'ensemble d'intégration en deux :

$$\int_{\{|\sum_{i=1}^d c_iy_i|>1\}}\prod_{j=1}^d(1\wedge y_j^{-2})\left|\sum_{i=1}^d c_iy_i\right|^{2\alpha+1}dy \le \int_{\mathbb{R}^d}\prod_{j=1}^d(1\wedge y_j^{-2})dy<\infty.$$

Par ailleurs

$$\int_{\{|\sum_{i=1}^d c_iy_i|<1\}}\prod_{j=1}^d(1\wedge y_j^{-2})\left|\sum_{i=1}^d c_iy_i\right|^{2\alpha+1}dy \le \int_{\mathbb{R}^d}\prod_{j=2}^d(1\wedge y_j^{-2})\left|\sum_{i=1}^d c_iy_i\right|^{2\alpha+1}dy. \tag{4.11}$$

On peut effectuer le changement de variables $u = \sum_{i=1}^{d} c_i y_i$, les y_j restant inchangés, et (4.11) est majorée à une constante multiplicative près par

$$\int_0^1 |u|^{2\alpha+1} du \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \prod_{j=2}^{d} (1 \wedge y_j^{-2}) dy_2 \ldots dy_d < \infty.$$

□

5 Conclusion

Les deux situations de forte dépendance étudiées dans cet article (forte dépendance régulière comme dans le corollaire 1 et non-régulière comme dans le corollaire 2) témoignent d'un comportement asymptotique dégénéré du processus empirique. C'est une propriété connue en dimension $d = 1$ qui semble donc persister dans le cadre des champs aléatoires même lorsque la forte dépendance n'est pas isotrope (cas du corollaire 2).

Par ailleurs, la loi limite du processus empirique indexé naturellement par x conduit à de nombreuses applications statistiques comme l'étude de la loi asymptotique des M-estimateurs, des U-statistiques ou des statistiques de von-Mises. D'autres applications nécessitent la convergence du processus empirique doublement indexé que avons obtenue ; c'est par exemple le cas des tests de détection de rupture. L'étude de ces applications est en cours.

Références

Bickel, P. J. and Wichura, M. J. (1971). Convergence criteria for multiparameters stochastic processes and some applications. *The Annals of Mathematical Statistics*, 42(5) :1656–1670.

Bingham, N., Goldie, C., and Teugels, J. L. (1987). *Regular variation*. Encyclopedia of Mathematics and its applications, Vol. 27. Cambridge University Press.

Dehling, H. and Taqqu, M. S. (1989). The empirical process of some long-range dependent sequences with an application to u-statistics. *Ann. Stat.*, 4 :1767–1783.

Dobrushin, R. L. and Major, P. (1979). Non central limit theorems for non-linear functionals of gaussian fields. *Z. Warsch. verw. Geb.*, 50 :27–52.

Doukhan, P., Lang, G., and Surgailis, D. (2002). Asymptotics of weighted empirical processes of linear fields with long-rang dependence. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 6 :879–896.

Lavancier, F. (2003). Principes d'invariance pour les champs aléatoires fortement dépendants, partie 1 : théorème de convergence de champs spectraux. Technical Report 60, XII, IRMA, Lille.

Ould Haye, M. (2002). Asymptotical behavior of the empirical process for seasonal long-memory data. *ESAIM*, 6 :293–309.

Pollard, D. (1984). *Convergence of stochastic processes.* Springer Series in Statistics. Springer-Verlag.

Wainger, S. (1965). *Special trigonometric series in k-dimensions.* Number 59. AMS.